



Mathematical Modelling of the Cross-sectional Area of Uncut Chips when Milling a Radial Groove

Georgi VALCHEV, Dimka VASILEVA

Technical university of Varna, Varna, Bulgaria,
e-mails: georgi.valchev@tu-varna.bg, d.vasileva@tu-varna.bg

Abstract

This paper presents a geometrical model for finding the cross sectional area distribution of the uncut chip when milling a radial groove on an inner cylindrical surface with a profile milling tool. The model is built mainly by defining parametric curves and surfaces and their intersections. The cross sectional area distribution is then calculated by an algorithm based on the model, which carries out the computation. In the end, the algorithm was used to calculate the cross sectional area distribution for different cutting speeds and the results were analysed.

Keywords: Cross sectional area, uncut chip, radial groove, cylindrical surface, prolate trochoid, cutting edge, profile milling tool, parametric curve/surface, intersection, trajectory.

Математическо моделиране площта на напречното сечение на срязвания слой материал при фрезование на радиален канал

Георги ВЪЛЧЕВ, Димка ВАСИЛЕВА

1. Увод

Профилното фрезование е вид механична обработка, при която се използва профилна фреза за отнемане на материал от заготовката, посредством което е се образувана желаната по форма и размери повърхнина. Технологиата на формообразуването се извършва с помощта на различни профилни инструменти, чиито контур на режещия ръб съответства на формообразуването на желаната повърхност. Често срещано приложение на профилното фрезование е обработката на канали.

При фрезование на канал с трапецовидно напречно сечение, първо се изрязва канал с правоъгълно сечение, а за да бъде образувана наклонената повърхнина на канала, се използва профилна фреза. При обработка на канала чрез фрезование с профилна фреза, прибавката подлежаща на снемане, е призматична или ротационна с триъгълно сечение. Формата на стружката, преди нейното снемане, и по-конкретно физичните елементи на режима на рязане при тази операция (дебелина, широчина и площ на напречното сечение на срязвания слой) са от особен интерес при характеризиране на процеса на рязане. Площта на напречното сечение на срязвания слой представлява обект на интерес за много фирми производители на фрезови инструменти за най-различни приложения и се явява предмет на изследване.

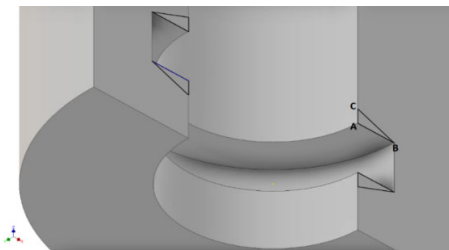
Целта на тази разработка е изчисляване площта на напречното сечение на срязвания слой материал, при фрезование с профилна фреза на наклонената повърхнина на радиален канал с трапецовидно сечение, върху вътрешна полуцилиндрична повърхнина, като е разработен модел на процеса фрезование.

В разработката е изграден геометричен модел на разглеждания процес на рязане, а на базата на това е съставена изчислителна програма за определяне на стойностите на площта на напречното сечение на срязвания слой материал. Проведени са изчисления за определяне площта на напречното сечение на срязвания слой материал при различни режими на рязане и е направен анализ на получените резултати [1].

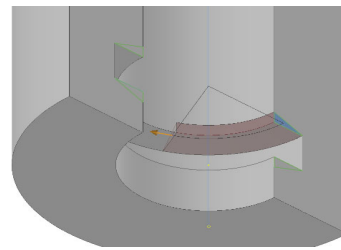
2. Моделиране траекторията на режещия ръб на инструмента

Обработката чрез фрезование на канали с трапецовидна форма е принципен, тъй като грубата обработка на такъв тип канали чрез една операция в повечето случаи е нецелесъобразна.

Напречното сечение на материалът, подлежащ на изрязване е определен като скицирана площ с формата на правоъгълен триъгълник ΔABC (фиг. 2.1). Ако този триъгълник е представен за предната повърхнина на металорежещ инструмент и то тази част от нея, която е в директен контакт с изрязвания материал, тогава хипотенузата BC на този триъгълник е режещия ръб на инструмента.



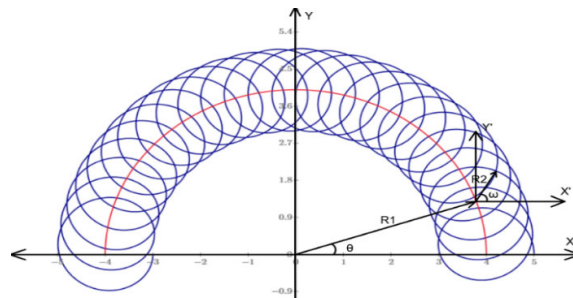
Фиг. 2.1: CAD модел на заготовката



Фиг. 2.2: Предвидена прибавка за изрязване преди профилното фрезование

Фиктивното завъртане на тази триъгълна площ по протежение на канала, в процеса на което пресечения с площта материал мисловно е отнет, е идеална интерпретация на цялостната форма на снетия материал след завършената операция (виж фиг. 2.2).

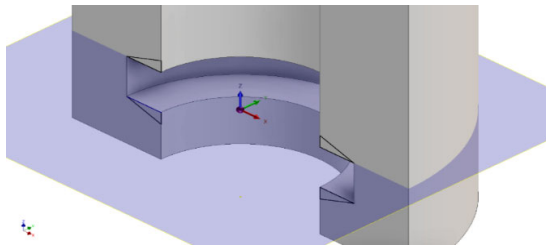
При обхождане на тази прибавка чрез профилно фрезование, траекторията, описана от точка на режещия ръб на профилния фрезови инструмент е крива на удължена циклоида. Тази крива е описана параметрично в декартова координатна система, като за параметър в случая, удачно е използвано времето t в секунди s (фиг. 2.3).



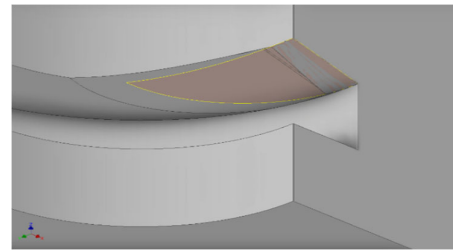
Фиг. 2.3: Параметрично представяне на крива на удължена циклоида

Определена е координатна система XYZ , в която е извършено изграждането на модела, като на равнината XY лежи катета AB , а оста Z съвпада с оста на цилиндричната

повърхнина (фиг. 2.4). Разработката на модела на рязане е извършена, като съвместно са използвани XU и XYZ .



Фиг. 2.4: Зададена координатна система



Фиг. 2.5: Формообразуване при основна обработка

Предмет на разглеждане са траекториите на крайните точки от режещия ръб, т.е. тази, която е най-отдалечена от оста на инструмента – $R_{ти}$, и тази, която е най-приближена до оста на инструмента – $R_{тр}$. Разстоянията $R_{ти}$ и $R_{тр}$ са определени като фиксирани стойности, съобразно зададените размери, а ъгловата скорост на оста на инструмента по кръгова траектория – θ и тази на точка от режещия ръб на инструмента, спрямо оста – ω , които представляват режимите на рязане, са определени като стойности подлежащи на промяна в последващите етапи на разработката.

За да бъде улеснено анализирането на кинематиката на рязане и направено по-нагледно представянето на срязвания слой са зададени стойностите $\theta = 5 \frac{rad}{s}$ и $\omega = 60 \frac{rad}{s}$, които в практиката са нереалистични режими на рязане.

При отнемане на материал посредством движението на ΔABC по траекторията на удължената циклоида [1] със зададените параметри, е наблюдавано формообразуването, показано на фиг. 2.5, където се виждат образуваните повърхнини при предходно и текущо обхождане.

За целите на изследване на процеса е описана линейна повърхнина, определена от движението на режещия ръб в тримерното пространство. За целта, първоначално е прието, да се разглеждат траекториите на крайните точки в това пространство в удобен за анализ времеви интервал $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{\omega}, s$:

$$P_2(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1ти} \cos(\theta t) + R_{2тр} \cos(\omega t) \\ R_{1ти} \sin(\theta t) + R_{2тр} \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} [mm] \quad (2.1)$$

$$P_3(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1ти} \cos(\theta t) + R_{3тр} \cos(\omega t) \\ R_{1ти} \sin(\theta t) + R_{3тр} \sin(\omega t) \\ l_3 \end{bmatrix} [mm] \quad (2.2)$$

където:

$P_2(t)$ и $P_3(t)$ – съответно най-отдалечената и най-приближената до оста на инструмента траектории;

$x_2(t)$, $y_2(t)$, $x_3(t)$ и $y_3(t)$ – описват параметричните криви на двете точки по осите X и Y в mm ;

$R_{1ти}$, $R_{2тр}$ и $R_{3тр}$ – съответните разстояния, изчислени от зададените размери.

l_3 – разстоянието по оста Z или, в случая, малкия катет AC на ΔABC , mm .

Между тези криви в тримерното пространство са построени параметрични линейни сегменти, при което е образувана линейната повърхнина, описваща движението на режещия рѣб. Тя е изразена по следния начин (фиг. 2.6):

$$P_4(t, s) = (1 - s)P_2(t) + sP_3(t) [mm] \quad (2.3)$$

където:

- s – скаларен параметър ($0 \leq s \leq 1$), описващ линеен сегмент между двете траектории.

Мислено е разделена повърхнината $P_4(t, s)$, на две части: обхождане в предходна обработка и обхождане в текуща обработка. Разделителна граница между двата етапа, в случая, е кривата на самопресичане на повърхнината. Права линия, лежаща на повърхнината, е само тази, която минава през точки $P_2(t)$ и $P_3(t)$, при равни стойности на параметъра t . Тъй като траекториите на двете крайни точки на режещия рѣб не са рационални, намирането на точките, в които е самопресичането им не е възможно по алгебричен начин. За целта е използван изчислителен метод за намирането на уравненията: $P_2(t_1) = P_2(t_2)$ и $P_3(t_1) = P_3(t_2)$, където $t_1 \neq t_2$.

По този начин, посредством изчислително-итерационен подход, са намерени двете времеви точки, в които кривите се самопресичат, със задоволителна точност [2]. При сравняване на двете точки, при зададените режими на рязане, е наблюдавана разлика от $5 \cdot 10^{-3} s$. Тази малка разлика позволява построяването на линия между двете пресечни точки в тримерните координати, която е добро приближение на кривата на пресечницата (фиг. 2.6):

$$R_3(s) = P_3(t_1) + s(P_2(t_1) - P_3(t_1)) [mm] \quad (2.4)$$

При използването на по-реалистични режими на рязане, тази линия е още по-добро приближение на действителната пресечница. Врязването на режещия рѣб в материала в текущия етап на обработка, се случва в точка, лежаща на тази пресечница.

Обемът на заготовката, в който е разглеждано рязането, е избран за участък по протежение на ъгловия канал с правоъгълно напречно сечение, като единия диагонал на правоъгълника съвпада с BC . За целите на графично изобразяване на кинематиката, обемът е заграден от параметрични повърхнини. Вътрешната и външна цилиндрични повърхнини са представени като:

$$R_1(u_1, v_1) = \begin{bmatrix} R_{\text{вът}} \cos(u_1) \\ R_{\text{вът}} \sin(u_1) \\ v_1 \end{bmatrix} [mm] \quad (2.5)$$

$$R_2(u_1, v_1) = \begin{bmatrix} R_{\text{вън}} \cos(u_1) \\ R_{\text{вън}} \sin(u_1) \\ v_1 \end{bmatrix} [mm] \quad (2.6)$$

където:

$R_1(u_1, v_1)$ и $R_2(u_1, v_1)$ – съответно вътрешна и външна цилиндрични повърхнини;

u_1 – ъглов параметър, в rad , в интервал $0 \leq u_1 \leq \frac{\pi}{2}$;

v_1 – линеен параметър, в mm , в интервал $0 \leq v_1 \leq l_3$;

$R_{\text{вът}}$ и $R_{\text{вън}}$ – съответно радиусите, в mm , на вътрешната и външната цилиндрични повърхнини, изчислени от използваните размери.

Долната и горна дискови равнини са:

$$R_9(u_1, v_2) = \begin{bmatrix} v_2 \cos(u_1) \\ v_2 \sin(u_1) \\ 0 \end{bmatrix} [mm] \quad (2.7)$$

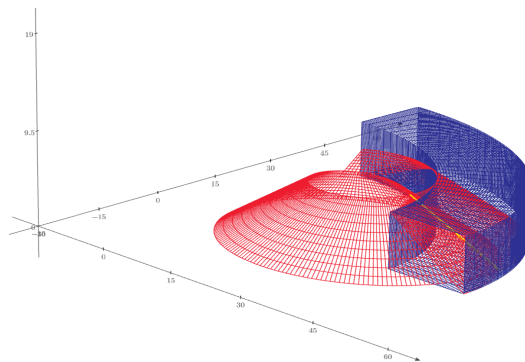
$$R_{10}(u_1, v_2) = \begin{bmatrix} v_2 \cos(u_1) \\ v_2 \sin(u_1) \\ l_3 \end{bmatrix} [mm] \quad (2.8)$$

където:

$R_9(u_1, v_2)$ и $R_{10}(u_1, v_2)$ – съответно долна и горна дискови равнини;

v_2 – линеен параметър в mm , в интервал $R_{в\check{b}т} \leq u_2 \leq R_{в\check{b}н}$.

С описанията на повърхнините е осъществено тримерното графично изобразяване на разглеждания процес за приетия интервал (фиг. 2.6).



Фиг. 2.6: Процесът на рязане, описан в тримерни координати. Повърхнината на рязане (червено); пресечницата на повърхнината на рязане (жълто); разглеждан обем от заготовката (синьо).

След като обстойно е разгледан процеса на формообразуване в тримерни координати, зависимостите за намиране на площта на напречното сечение на срязвания слой материал са съставени в двумерни координати, като мислено е наблюдаван процеса на рязане, като проекция в равнината XU .

Построени са проекции на $P_2(t)$, $P_3(t)$, $R_1(u_1, v_1)$, $R_2(u_1, v_1)$ и $R_3(s)$, съответно като $p_2(t)$, $p_3(t)$, $r_1(u_1, v_1)$, $r_2(u_1, v_1)$ и $r_3(s)$ и отделно е построена кръгова траектория на оста на инструмента:

$$p_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1ти} \cos(\theta t) \\ R_{1ти} \sin(\theta t) \end{bmatrix} [mm] \quad (2.9)$$

Построена е линия, между двете крайни траектории, в конкретен времеви момент от рязането $t_{ряз}$, чиято дължина, в разглежданата равнина е равна на дължината на катет AB и е описание на проекцията на режещия ръб в XU в разглежданата времева точка:

$$r_4(s) = p_2(t_{ряз}) + s(p_3(t_{ряз}) - p_2(t_{ряз})) [mm] \quad (2.10)$$

Построяването на линията на режещия ръб в двумерни координати помага при онагледяването на движението му по траекторията и взаимодействието му с останалите ограничения в модела.

Първата особеност, която е наблюдавана е, че в отделни моменти от времето, определена дължина от режещия ръб, не е в контакт с обработвания материал. Това се явява дължината между точка $r_4(0)$ и пресечницата между $r_4(s)$ и $r_1(u_1)$. Построена е линия, която описва тази част от ръба извън контакт:

$$r_5(s) = p_3(t_{\text{ряз}}) + s \left(r_1(u_{r_1r_4}) - p_3(t_{\text{ряз}}) \right) [mm] \quad (2.11)$$

където:

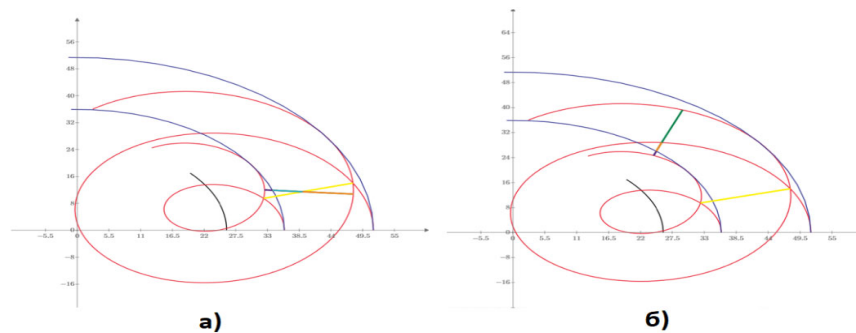
$u_{r_1r_4}$ – пресечна точка за параметър u_1 , между $r_1(u_1)$ и $r_4(s)$, намерена числено.

Врязването на режещия ръб в материала при текуща обработка, става през пресечната точка между линиите $r_1(u_1)$, $r_3(s)$ и $r_4(s)$. След това режещият ръб продължава пресичането си с $r_3(s)$, докато се допре с точката на самопресичане на $p_2(t)$. В този интервал от време, частта от режещия ръб, намираща се в контакт с материала, е тази между пресечна точка $r_4(s) - r_1(u_1)$ и пресечна точка $r_4(s) - r_3(s)$. Съответно този сегмент от режещия ръб, който не е в контакт е:

$$r_7(s) = r_5(1) + s \left(p_2(t_{r_4p_2}) - r_5(1) \right) [mm] \quad (2.12)$$

където:

$t_{r_4p_2}$ – пресечна точка за параметър t , между $r_4(s)$ и $p_2(t)$, намерена числено.



Фиг. 2.7: Двумерен модел на обхождане на режещия ръб: а) проекция на линията на режещия ръб в етап на връзване; б) проекция на линията на режещия ръб в етап на текуща обработка

От това следва, че сегмента на линията на режещия ръб, изпълняващ рязане е:

$$r_8(s) = r_5(1) + s \left(r_3(s_{r_3r_4}) - r_5(1) \right) [mm] \quad (2.13)$$

където:

– $s_{r_3r_4}$ – пресечна точка за параметър s , между $r_3(s)$ и $r_4(s)$.

На фиг. 2.7а е показана линията на режещия ръб в етапа на връзване, където лилавия сегмент е $r_5(s)$, намиращ се извън ограниченията на обема на материала. Синьо-зеления сегмент, извършващ рязане в конкретния момент е $r_8(s)$, а оранжевия сегмент, който предстои да се вреже в материала е $r_7(s)$.

След като $r_4(s)$ излезе от пресичане с $r_3(s)$, режещия ръб продължава по траекторията, където извършва основната част от текущата обработка, а неговата натовареност се променя в зависимост от пресичането му с $r_1(u_1)$. Накрая излиза от

материала през точка, която се явява последната пресечница между $p_2(t)$ и $r_1(u_1)$, в разглежданите области на параметрите. На фиг. 2.7б е показана линията на режещия рѐб в етапа на текуща обработка, където лилавия сегмент е $r_5(s)$. Оранжевия сегмент, $r_7(s)$, е в контакт с материала и се явява тази част от линията на режещия рѐб, намираща се директно над вече обработената повърхнина от предходно обхождане. Зеления сегмент от линията на режещия рѐб също изпълнява рязане, но е тази част, която се намира над необработена повърхнина и се явява останалата част от $r_4(s)$.

Моделът е разделен на етапи на рязане, както следва:

- етап на предходна обработка – обхващащ движението на режещия рѐб във времеви интервал $0 \leq t \leq t_{r_1p_2}$, където крайната точка от областта е времеви параметър на траекторията при първото пресичане между $r_1(u_1)$ и $p_2(t)$;
- етап на връзване в материала – където е разглеждано движението на режещия рѐб, във времеви интервал на пресичането му с $r_3(s)$;
- етап на текуща обработка – започва с края на етапа на връзване и завършва с изливането на режещия рѐб от материала.

За целите на намирането на площта на напречното сечение на срязвания слой материал, при текуща обработка, анализът е пренесен отново в тримерни координати. Построена е триъгълна равнина, в конкретен момент от процеса на рязане, определена от линейния сегмент на режещия рѐб, намиращ се в контакт с материала и неговата проекция. Тази равнина се явява площта на ΔABC в разглеждания момент от движението му по направление на траекторията на рязане (фиг. 2.8). Основната идея за намиране на площта на напречното сечение на срязвания слой, в отделен момент от времето, е като от площта на ΔABC са извадени тези площи, които не участват в процеса на рязане в етап на връзване и етап на текуща обработка [3].

Първо, по алгебричен начин, е намерена тази част от площта на ΔABC , намираща се в загражденията на обработвания материал, в конкретния момент на рязане:

$$A_{\text{тек1}} = (l_1 - |r_5(1) - r_5(0)|)^2 \frac{\tan(\alpha)}{2} [mm^2] \quad (2.14)$$

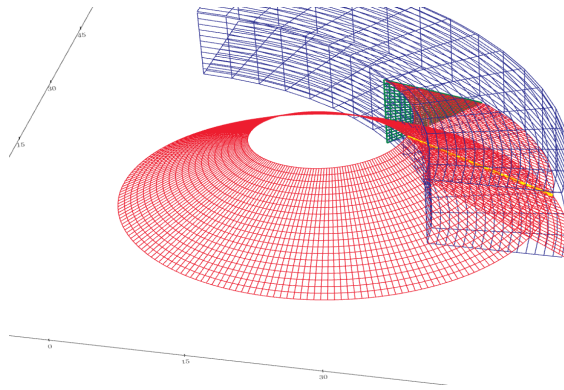
където:

- l_1 – дължина на AB в mm ;
- α – ъгъл на профилната фреза в rad .

В етапа на връзване, площта заключена между линията $r_7(s)$ и нейната проекция, не участва в процеса на рязане. Тази площ също е намерена алгебрично.

$$A_{\text{вряз1}} = A_{\text{тек1}} - |r_7(1) - r_7(0)|^2 \frac{\tan(\alpha)}{2} [mm^2] \quad (2.15)$$

След това, от $A_{\text{тек1}}$ или $A_{\text{вряз1}}$, в зависимост от етапа на рязане, е извадена площта на изрязания слой материал ($A_{\text{тек2}}$ или $A_{\text{вряз2}}$) от предходна обработка. Това е направено като са използвани контактните линии $r_4(s) - r_5(s)$ и $r_7(s)$ за построяване на равнини, заключени между тях и техните проекции в XY . Тези равнини, пресичайки се с $P_4(t, s)$, описват пресечна крива. Тази пресечница е намерена посредством представения теоретичен подход в [1]. Площта на равнината, заключена между образуваната пресечна крива и нейната проекция в XY , е площта на изрязания слой материал.

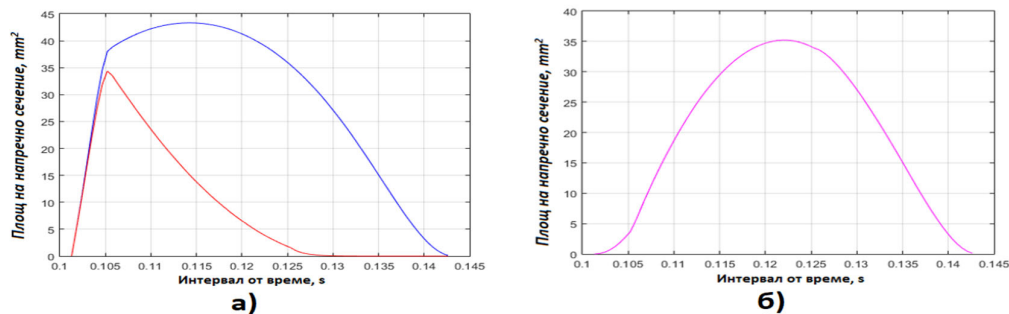


Фиг. 2.8: Равнината (зелено), заключена между линията на режещия ръб и неговата проекция в XY

За да бъде изчислена променливата площ на напречното сечение на срязвания слой материал, построеният модел е дискретизиран във времето в интервала от началото на етапа на врязване до края на етапа на текуща обработка, като за всеки дискретен момент от време е изчислена площта на напречното сечение на срязвания слой материал, посредством разработен алгоритъм.

3. Сравняване получените резултати при различни режими на рязане

Първите изчисления са направени с използваните размери и режимите на рязане, с които е изграден модела. Резултатите са логични и отговарят на очакванията. Построени са графики на $A_{\text{вряз1}}$, $A_{\text{тек1}}$ и $A_{\text{вряз2}}$, $A_{\text{тек2}}$, за целия период на обхождане на режещия ръб през материала и отделна графика на площта на срязвания слой материал: $A_{\text{вряз}} = A_{\text{вряз1}} - A_{\text{вряз2}}$, $A_{\text{тек}} = A_{\text{тек1}} - A_{\text{тек2}}$ (фиг. 3.1).



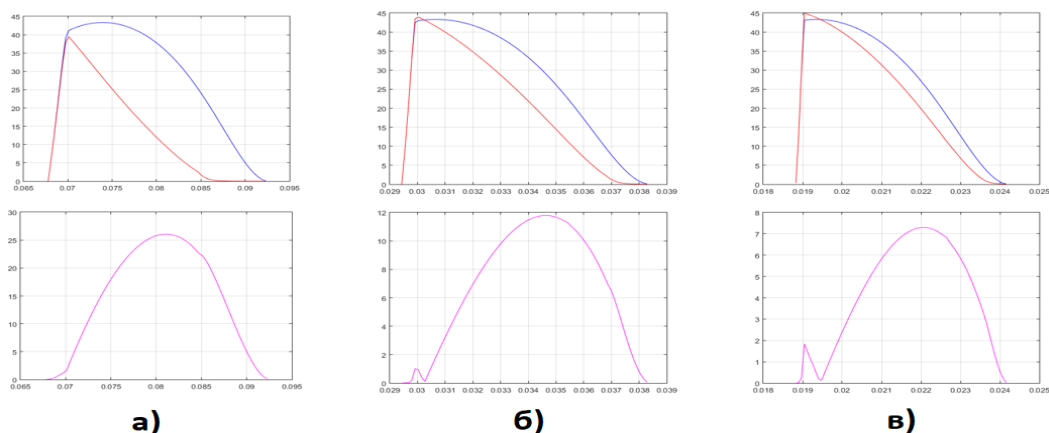
Фиг. 3.1: Площта на напречното сечение на срязвания слой материал при $\theta = 5 \text{ rad/s}$ и $\omega = 60 \text{ rad/s}$:
 а) площта от ΔABC , която е в ограничения на материала (синьо) и площта от ΔABC , която обхожда вече свален материал от предходно изрязване (червено); б) площта на напречното сечение на срязвания слой материал

При промяна на режимите на рязане, разпределението на стойностите на напречното сечение на срязвания слой материал, остава същото. Това означава, че формообразуването на стружката не се променя. Променят се само нейните размерни параметри.

При фрезование режимите на рязане могат да бъдат изразени в това колко често се врязва зъб в обработвания материал. Тази честота на обработване е косвено изразена чрез

съотношение между ъгловата скорост на оста на инструмента по кръговата траектория и ъгловата скорост на въртене на вретеното на машината. Това съотношение е определено като: $\gamma = \frac{\omega}{\theta}$. С увеличаването на стойността ω , нараства честотата, с която се връзва зъб в материала и това се изразява с нарастване в γ .

Разработената програма е използвана за намиране на стойностите на площта на напречното сечение на срязвания слой при линейно нарастващи стойности на γ . Всички резултати отговарят на очакванията, че зависимостта на изменение на площта остава същата, но самите стойности намаляват. В противовес на добрите резултати, обаче, при кривите на по-големите стойности на γ са наблюдавани и леки разминавания в стойностите на $A_{\text{тек1}}$ и $A_{\text{тек2}}$.



Фиг. 3.2: Резултати от три от проведените изчисления при увеличаване на режимите на рязане: а) резултати при $\gamma = 18$; б) резултати при $\gamma = 42$; в) резултати при $\gamma = 66$

Записани са данните на най-ключовите стойности на тези криви – максималните стойности и времената, в които се отчитат (фиг. 3.2).

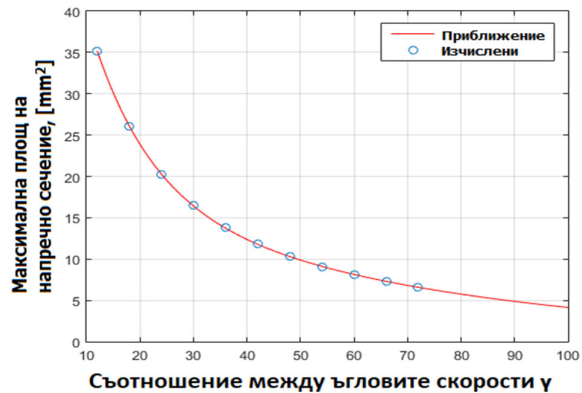
От тези стойности е направен извода, че стойностите на кривата на площта намаляват логаритмично с увеличаване на режима на рязане. Поради това тези точки са използвани за построяване на логаритмична крива, която с приближение описва тази зависимост (фиг. 3.3):

$$A_{\text{макс}}(\gamma) = a_{\text{к}}e^{b_{\text{к}}\gamma} + c_{\text{к}}e^{d_{\text{к}}\gamma} \text{ [mm}^2\text{]} \quad (3.1)$$

където:

$a_{\text{к}}$, $b_{\text{к}}$, $c_{\text{к}}$ и $d_{\text{к}}$ – числово намерени стойности на коефициентите и степенните показатели на експоненциалните изрази.

По този начин е възможно с приближение да бъдат екстраполирани стойностите на площите на напречното сечение, но трябва да се отбележи, че при твърде отдалечено, от взетите данни, екстраполиране, са очаквани по-големи отклоненията от действителните стойности.



Фиг. 3.3: Построена крива, минаваща с приближение през изчислените максимални стойности на данните

4. Изводи и заключения

Целта на разработката е постигната с адекватни резултати, отговарящи на очакванията, с поставена бъдеща задача за работа по подобрене и разширение на направеното изследване.

Основен фактор, който отклонява модела от идеална интерпретация на процеса е това, че не всички съставени зависимости са алгебрично изчислими, поради това, че някои от параметричните криви и повърхнини, с които е описан процеса, не са рационални и това ограничава възможността за работа с тях.

Направен е изводът, че съставянето на идеален модел на процеса на снемане на материал, чрез технологията фрезозане, е сложна и трудоемка задача и това предполага, че съставянето на имитационен модел на по-сложни фрезови процеси, би включвало твърде много неточности под формата на изчислителни методи за апроксимация или би било, в някои случаи, невъзможно изграждането на адекватна интерпретация. Извършената разработка показва защо идеални имитационни модели са съставени само за най-елементарните фрезови процеси и защо в практиката, изчисляването на физичните параметри на конкретно фрезозане е направено, чрез съставяне на опростени модели, приближаващи идеалния.

Литература

1. Hee-Seok H., Myung-Soo K., Gershon E., The Intersection of Two Ruled Surfaces, Department of Computer Science, POSTECH, Pohang, South Korea, 1998
2. Zhang X., Wu J., Approximate Implicitization of Parametric Curves Using Cubic Algebraic Splines, College of Statistics and Mathematics, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou, China, 2009
3. Rodkwan, Supasit, A numerical and experimental investigation of the machinability of elastomers, 2002